第 30 講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

例題 30 － 1

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 30 － 1

$a>0$, $b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+1+\dfrac{12}{a+1}\geqq 4\sqrt{3}$　　(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 8$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 30 ー 2

(1)　$x>0$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=16$ のとき，$a+b$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 30 ー 2

(1)　$x>-2$ のとき　$x+2+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=12$ のとき，$a+2b$ の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 30 − 3

(1)　次の計算をせよ．

(ア)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(イ)　$(3-4i)^2$　　(ウ)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ．

(ア)　$x+3i=-4+yi$　　(イ)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 30 － 3

(1)　次の計算をせよ．

(ア)　$(3+2i)-(2-i)$　　(イ)　$(3+5i)^2$　　(ウ)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y，a，b の値を求めよ．

(ア)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　　(イ)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=1+bi$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 30 － 4

(1)　次の 2 次方程式を解け.

　　(ア)　$x^2=-4$　　　　(イ)　$x^2-2x+3=0$

(2)　a を定数とする．2 次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の解の種類を判別せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 30 ー 4

(1)　次の2次方程式を解け.

(ア)　$x^2=-5$　　(イ)　$x^2+4\sqrt{3}x+13=0$

(2)　a を定数とする．2次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ は $x=$ [ア] のとき最小値 [イ] をとる.

(2)　$(2+i)x+(-i+3)y=\dfrac{1}{1+i}$ を満たす実数 x，y は　$x=-\dfrac{1}{[ウ]}$，$y=\dfrac{[エ]}{[オカ]}$ である.

(3)　2 次方程式 $4x^2-3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{[キ]\pm\sqrt{[ク]}\,i}{[ケ]}$ である.

(4)　2 次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ は　$-[コ]<m<[サ]$ のとき異なる 2 つの虚数解をもつ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　式と証明⑶・複素数と方程式⑴

例題 30 ー 1

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

⑴　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　⑵　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

⑴　$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

等号成立は　$a=\dfrac{1}{a}$ より　$a^2=1$　　$a>0$ より　$a=1$ のとき

⑵　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$$

よって　$ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 4+5=9$

したがって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

等号成立は　$ab=\dfrac{4}{ab}$　　つまり　$ab=2$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 30 ー 1

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+1+\dfrac{12}{a+1}\geqq 4\sqrt{3}$　　(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 8$

(1)　$a+1>0$，$\dfrac{12}{a+1}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$a+1+\dfrac{12}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\dfrac{12}{a+1}}=2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

等号成立は　$a+1=\dfrac{12}{a+1}$　より　$(a+1)^2=12$

$a+1>0$ より　$a+1=2\sqrt{3}$

つまり　$a=2\sqrt{3}-1$　のとき

(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+2=\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4$

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{4b}{a}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=2\times 2=4$

よって　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4\geqq 4+4=8$

したがって　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 8$

等号成立は　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$　　$a^2=4b^2$　　つまり　$a=2b$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 30 − 2

(1)　$x>0$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=16$ のとき，$a+b$ の最小値を求めよ.

(1)　$x>0$，$\dfrac{2}{x}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$$x+\frac{2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$$

等号成立は　$x=\dfrac{2}{x}$ より　$x=\sqrt{2}$ のとき

よって　$x+\dfrac{2}{x}$ は　**$x=\sqrt{2}$ のとき　最小値 $2\sqrt{2}$ をとる.**

(2)　$a>0$，$b>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{16}=2\cdot 4=8$

等号成立は　$a=b$　かつ　$ab=16$　より　$a=b=4$ のとき

よって　$a+b$ の**最小値は 8**（$a=b=4$ のとき）

類題 30 − 2

(1)　$x>-2$ のとき　$x+2+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=12$ のとき，$a+2b$ の最小値を求めよ.

(1)　$x+2>0$，$\dfrac{16}{x+2}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$$x+2+\frac{16}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}=2\cdot 4=8$$

等号成立は　$x+2=\dfrac{16}{x+2}$ より　$(x+2)^2=16$　$x+2=4$

つまり　$x=2$　のとき

よって　$x+2+\dfrac{16}{x+2}$ は　**$x=2$ のとき　最小値 8 をとる.**

(2)　$a>0$，$2b>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$a+2b\geqq 2\sqrt{a\cdot 2b}=2\sqrt{2ab}=2\sqrt{2\cdot 12}=2\cdot 2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

等号成立は　$a=2b$　かつ　$ab=12$　より　$a=2\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$ のとき

よって　$a+2b$ の**最小値は $4\sqrt{6}$**（$a=2\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$ のとき）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 30 － 3

(1)　次の計算をせよ．

(ア)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(イ)　$(3-4i)^2$　　(ウ)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ．

(ア)　$x+3i=-4+yi$　　(イ)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

(1)　(ア)　$(5-4i)+(2+2i)=5-4i+2+2i$

$=(5+2)+(-4+2)i$

$=\mathbf{7-2}\boldsymbol{i}$

(イ)　$(3-4i)^2=9-24i+16i^2$

$=9-24i+16\cdot(-1)$

$=\mathbf{-7-24}\boldsymbol{i}$

(ウ)　$\dfrac{1}{2+i}=\dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{2-i}{4-i^2}=\dfrac{2-i}{4-(-1)}$

$=\dfrac{2-i}{5}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i}$

(2)　(ア)　x，y は実数より　$\boldsymbol{x=-4,\ y=3}$

(イ)　$(4+2i)x+(1+4i)y+7=0$　より　$(4x+y+7)+(2x+4y)i=0$

$4x+y+7$，$2x+4y$ は実数より　$4x+y+7=0$，$2x+4y=0$

よって　$\boldsymbol{x=-2,\ y=1}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 30 − 3

(1)　次の計算をせよ.

(ア)　$(3+2i)-(2-i)$　(イ)　$(3+5i)^2$　(ウ)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x, y, a, b の値を求めよ.

(ア)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　(イ)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=1+bi$

(1)　(ア)　$(3+2i)-(2-i)=3+2i-2+i$

$=(3-2)+(2+1)i=\mathbf{1+3}\boldsymbol{i}$

(イ)　$(3+5i)^2=9+30i+25i^2$

$=9+30i+25\cdot(-1)=\mathbf{-16+30}\boldsymbol{i}$

(ウ)　$\dfrac{3+2i}{2-i}=\dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\dfrac{6+7i+2i^2}{4-i^2}=\dfrac{6+7i+2\cdot(-1)}{4-(-1)}$

$=\dfrac{4+7i}{5}=\mathbf{\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}}\boldsymbol{i}$

(2)　(ア)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　より　$x+yi-2xi+2y=2+6i$

つまり　$(x+2y)+(y-2x)i=2+6i$

$x+2y$, $y-2x$ は実数より　$x+2y=2$, $y-2x=6$

$\boldsymbol{x}\mathbf{=-2}$, $\boldsymbol{y}\mathbf{=2}$

(イ)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=\dfrac{(a+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{a-3ai+2i+6}{1+9}$

$=\dfrac{(a+6)+(-3a+2)i}{10}=\dfrac{a+6}{10}+\dfrac{-3a+2}{10}i$

よって与式は　$\dfrac{a+6}{10}+\dfrac{-3a+2}{10}i=1+bi$　と変形できる.

$\dfrac{a+6}{10}$, $\dfrac{-3a+2}{10}$, b は実数より　$\dfrac{a+6}{10}=1$, $\dfrac{-3a+2}{10}=b$

よって　$\boldsymbol{a}\mathbf{=4}$, $\boldsymbol{b}\mathbf{=-1}$

(別解)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=1+bi$　より

$a+2i=(1+bi)(1+3i)=1+3i+bi-3b=(1-3b)+(3+b)i$

a, $1-3b$, $3+b$ は実数より　$a=1-3b$, $2=3+b$

よって　$a=4$, $b=-1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 30 ー 4

(1)　次の 2 次方程式を解け.

(ア)　$x^2=-4$　　(イ)　$x^2-2x+3=0$

(2)　a を定数とする．2 次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の解の種類を判別せよ.

(1)　(ア)　$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\boldsymbol{2i}$

(イ)　$x=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm\sqrt{-2}=\boldsymbol{1\pm\sqrt{2}\,i}$

(2)　2 次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$　の判別式を D とすると

$D=(a-1)^2-4\cdot4\cdot1=a^2-2a-15=(a+3)(a-5)$

$D>0$　つまり　$\boldsymbol{a<-3,\ 5<a}$　**のとき**　**異なる 2 つの実数解**

$D=0$　つまり　$\boldsymbol{a=-3,\ 5}$　**のとき**　**重解**

$D<0$　つまり　$\boldsymbol{-3<a<5}$　**のとき**　**異なる 2 つの虚数解**

類題 30 ー 4

(1)　次の 2 次方程式を解け.

(ア)　$x^2=-5$　　(イ)　$x^2+4\sqrt{3}\,x+13=0$

(2)　a を定数とする．2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ.

(1)　(ア)　$x=\pm\sqrt{-5}=\boldsymbol{\pm\sqrt{5}\,i}$

(イ)　$x=-2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-13}=-2\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}=\boldsymbol{-2\sqrt{3}\pm i}$

(2)　2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$　の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot(-a^2+3)=3a^2-6=3(a^2-2)$$

$D>0$　つまり　$a^2-2>0$　より　$\boldsymbol{a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a}$　**のとき**　**異なる 2 つの実数解**

$D=0$　つまり　$a^2-2=0$　より　$\boldsymbol{a=\pm\sqrt{2}}$　**のとき**　**重解**

$D<0$　つまり　$a^2-2<0$　より　$\boldsymbol{-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}}$　**のとき**　**異なる 2 つの虚数解**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ は $x=$ [ア] のとき最小値 [イ] をとる.

(2)　$(2+i)x+(-i+3)y=\dfrac{1}{1+i}$ を満たす実数 x，y は　$x=-\dfrac{1}{[ウ]}$，$y=\dfrac{[エ]}{[オカ]}$ である.

(3)　2 次方程式 $4x^2-3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{[キ]\pm\sqrt{[ク]}\,i}{[ケ]}$ である.

(4)　2 次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ は　$-$[コ]$<m<$[サ] のとき異なる 2 つの虚数解をもつ.

解答例

(1)　$x>0$，$\dfrac{9}{x}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$$x+\frac{9}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot3=6$$

等号成立は　$x=\dfrac{9}{x}$　より　$x=3$ のとき

したがって　$x+\dfrac{9}{x}$ は　$x=\mathbf{3}$ のとき最小値 **6** をとる.

(2)　与式を変形すると

左辺は　$(2x+3y)+(x-y)i$

右辺は　$\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i}{1-i^2}=\dfrac{1-i}{1-(-1)}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$　となる.

$2x+3y$，$x-y$ は実数より　$2x+3y=\dfrac{1}{2}$，$x-y=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$x=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$，$y=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$

(3)　$4x^2-3x+1=0$　より　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\dfrac{3\pm\sqrt{-7}}{8}=\dfrac{\mathbf{3}\pm\sqrt{\mathbf{7}}\,i}{\mathbf{8}}$

(4)　2 次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-1\cdot(m+2)=m^2-m-2$$

よって，与えられた 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつのは

$D<0$　つまり　$m^2-m-2<0$　より　$(m+1)(m-2)<0$

したがって　$\mathbf{-1}<m<\mathbf{2}$　のときである.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。